Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Тренировочный вариант 1

Профильный уровень

Часть 1

1. Студентами технических вузов собираются стать 18 выпускников школы. Они составляют 45% от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

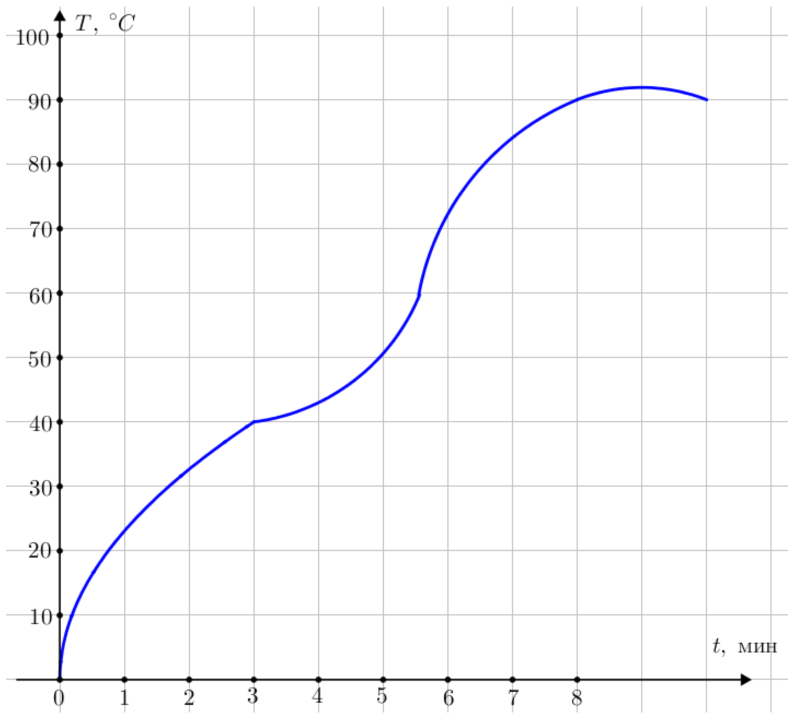
Решение.

Пусть x – искомое число всех выпускников школы. Тогда получим уравнение

$$x \cdot 0,45 = 18; \quad x = 40.$$

Ответ:___40_______

2. На графике показана зависимость температуры воды, выраженная в градусах Цельсия, от времени, отсчитываемого с начала её нагревания. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат – температура. Определите по графику, на сколько градусов изменилась температура воды с 3 минут до 8 минут. Ответ дайте в градусах Цельсия.



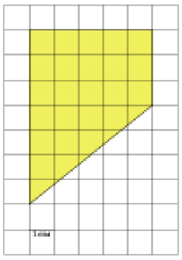
Решение.

Точке графика функции с абсциссой 3 соответствует ордината 40. Аналогично, точке графика с абсциссой 8 соответствует ордината 90.

Итак, с 3 минут до 8 вода нагрелась с 40 градусов Цельсия до 90 градусов Цельсия. Следовательно, температура воды изменилась на $90 - 40 = 50$ градусов Цельсия. Единицы измерения в ответ не пишутся.

Ответ:__50________

3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1*см* х 1*см* изображена фигура. Найти ее площадь в см^2.



Решение.

На рисунке изображена трапеция. Площадь трапеции $S = \dfrac{(a+b)\cdot h}{2}$, где a, b - основания, h - высота трапеции.

Используя рисунок, получим: $a = 7,\ b = 3,\ \ h = 5.$

Тогда $S = 25\text{см}^2$.

Ответ:___25_______

4. На олимпиаде по русскому языку 500 участников разместили в четырёх аудиториях: в трёх аудиториях по 150 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник будет писать олимпиаду в запасной аудитории.

Решение.

Запасная аудитория, очевидно, вмещает $500 - 3\cdot 150 = 50$ человек, соответственно 50 мест. Вероятность того, что наугад выбранному школьнику достанется одно из этих пятидесяти мест, равна

$$P = \tfrac{50}{500} = 0{,}1.$$

Ответ:___0,1_______

5. Решите уравнение $6^{x+6} = \frac{1}{36}$.

Решение.

Представим правую часть уравнения в виде степени числа 6.

$\frac{1}{36} = \frac{1}{6^2} = 6^{-2}, \qquad 6^{x+6} = 6^{-2}.$

В результате: $6^{x+6} = 6^{-2}, \; x+6=-2, \; x=-8.$

Ответ:_______-8_____

6. Дан параллелограмм со сторонами 21 и 28. К меньшей стороне проведена высота, длина которой равна 20. Найдите длину высоты, проведенной к большей стороне.

Решение.

Используя формулу площади параллелограмма, составим уравнение:

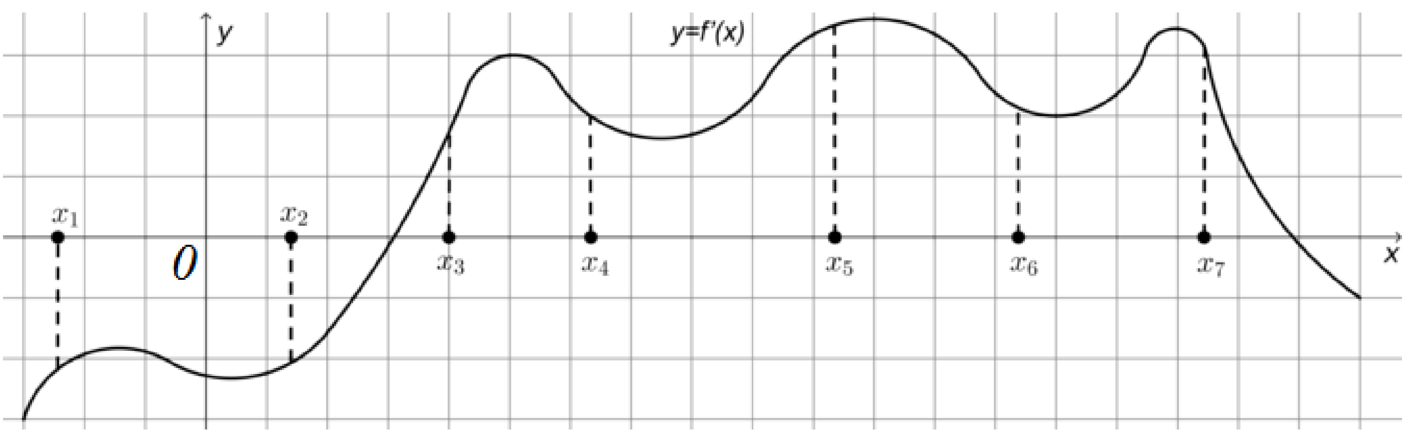
$$a \cdot h_a = b \cdot h_b,$$

где a и b – стороны параллелограмма, h_a и h_b – высоты параллелограмма, проведенные соответственно к сторонам a и b. По условию задачи, имеем:

$21 \cdot 20 = 28 \cdot h_b, \qquad h_b = \frac{21 \cdot 20}{28} = 3 \cdot 5 = 15.$

Ответ:______15______

7. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



Решение

Знак производной отражает характер изменения функции. В тех точках, где производная отрицательна, функция убывает, а в тех точках, где производная положительна, функция возрастает.
Среди точек графика с отмеченными абсциссами только точки
x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 обладают положительными ординатами.

Ответ:__5________

8. В сосуд цилиндрической формы налили воду до уровня 32 см. Какого уровня достигнет вода, если перелить её в другой сосуд цилиндрической формы, радиус основания которого в 4 раза больше радиуса основания первого сосуда.? Ответ дайте в см.

Решение.

Пусть R – радиус основания первого сосуда, тогда $4R$ – радиус основания второго сосуда. Высота столба воды в первом сосуде $h_1 = 32$. Считая объём воды при переливании неизменным, запишем дважды формулу объёма цилиндра:

$$\pi R^2 h_1 = \pi(4R)^2 h_2, \qquad h_2 = \frac{h_1}{16} = 2.$$

Ответ:__2________

Часть 2

9. Найдите значение выражения

$$4\sqrt{3}\cos^2\frac{5\pi}{12} - 2\sqrt{3}.$$

Решение.

Используя формулу понижения степени, получим:

$$\cos^2\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2},$$

$$2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3.$$

.

Ответ:____-3______

10. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 140$Гц и определяется следующим выражением :

$$f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v} (\text{Гц}),$$

где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 15$м/с и $v = 14$м/с – скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 145 Гц?

Решение.

Вопрос задачи можно переформулировать: найдите наибольшее значение c, при котором выполнено неравенство

$140 \cdot \frac{c+15}{c-14} \geq 145, \qquad \frac{28c + 420 - 29c + 406}{c-14} \geq 0, \qquad \frac{c-826}{c-14} \leq 0,$

$14 < c \leq 826.$

Ответ:___826_______

11. Теплоход, скорость которого в стоячей воде равна 27 км/ч, движется по течению из пункта А в пункт Б. По приезде в пункт Б теплоход сделал стоянку длительностью 5 часов, затем отправился обратно в пункт А. Известно, что теплоход вернулся в пункт А через 32 часа после отплытия из А. Сколько километров прошёл теплоход, если скорость течения реки равна 1 км/ч?

Решение.

Пусть x – расстояние между пунктами А и Б (в км). Тогда уравнение имеет вид:

$\frac{x}{27+1} + 5 + \frac{x}{27-1} = 32, \qquad \frac{13x + 14x}{2 \cdot 13 \cdot 14} = 27, \qquad x = 364.$

Так как теплоход прошел от А до Б, а затем вернулся из Б в А , то в ответ нужно указать удвоенное значение x.

Ответ:___728_______

12. Найдите точку минимума функции

$$y = 7x - \ln(x+10)^7 + 5.$$

Решение.

ОДЗ: $x > -10$.

Вынесем нечётную степень аргумента за знак логарифма:

$y = 7x - 7\ln(x+10) + 5.$

Найдем производную: $y' = \left(7x - 7\ln(x+10) + 5\right)' = 7 - \dfrac{7}{x+10} = \dfrac{7x+63}{x+10}$

Находим критические точки. Приравниваем производную к нулю:

$\dfrac{7x+63}{x+10} = 0,\quad \text{x} = -9.$

Используя метод интервалов, нетрудно заметить, что производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через $x = -9$, значит это и есть точка минимума функции.

Ответ:_____-9______

13. а) Решите уравнение

$\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x\right) = x.$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

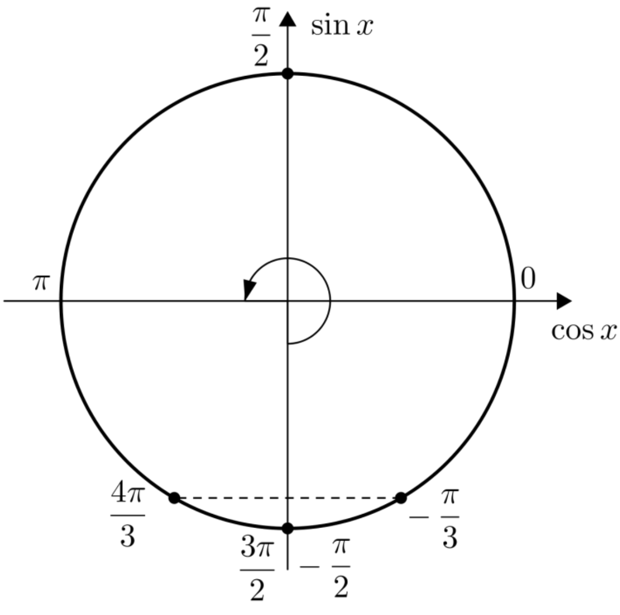
Решение.

$$\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x\right) = x \Leftrightarrow 2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x = 4^x \Leftrightarrow$$

$$2\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрического круга.



$x=-\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{4\pi}{3}$, $x=\frac{3\pi}{2}$

Ответ: а) $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, \\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \end{array}\right.$

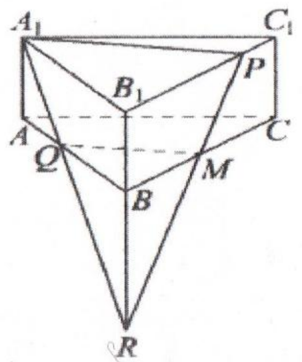
б) $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На ребрах B_1C_1 и AB отмечены точки P и Q соответственно, причем $PC_1=3$, а $AQ=4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра BC.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ.

Решение.



а) Пусть прямые A_1Q и BB_1 пересекаются в точке R (см. рисунок). Тогда точка M — точка пересечения прямых PR и BC.

Треугольники A_1B_1R и QBR подобны, откуда

$$\frac{BR}{B_1R}=\frac{QB}{A_1B_1}=\frac{2}{3};\ RB=2BB_1=4.$$

Треугольники PB_1R и MBR подобны, откуда

$$\frac{BM}{B_1P}=\frac{BR}{B_1R}=\frac{2}{3};\ BM=\frac{2}{3}B_1P=6.$$

Значит, M — середина BC.

б) Расстояние от точки B до плоскости A_1PQ равно высоте h пирамиды $BRQM$, опущенной из вершины B. Объём пирамиды $BRQM$, с одной стороны, равен

$$\frac{1}{3}\cdot RB\cdot S_{QMB}=\frac{1}{3}\cdot RB\cdot\frac{1}{2}BQ\cdot BM\cdot\sin 60^\circ=16\sqrt{3}.$$

С другой стороны, объём пирамиды $BRQM$ равен $\frac{1}{3}\ h\ S_{QMR}$. Значит,

$$h=\frac{3\cdot 16\sqrt{3}}{S_{QMR}}.$$

В треугольнике QMR находим стороны:

$$QM=MR=2\sqrt{13},\ QR=4\sqrt{5}.$$

Площадь равнобедренного треугольника QMR равна

$$S_{QMR}=\frac{1}{2}\cdot QR\sqrt{QM^2-\frac{QR^2}{4}}=8\sqrt{10}.$$

Следовательно, $h=\frac{3\ 16\sqrt{3}}{8\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$.

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{30}}{5}$.

15. Решите неравенство:

$$\frac{2^x}{2^x-8}+\frac{2^x+8}{2^x-4}+\frac{66}{4^x-12\cdot 2^x+32}\le 0.$$

Решение.

Пусть $2^x = t > 0$. Исходное неравенство перепишется в виде:

$$\frac{t}{t-8}+\frac{t+8}{t-4}+\frac{66}{(t-8)(t-4)}\le 0.$$

$$\frac{t^2-4t+t^2-64+66}{(t-8)(t-4)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{(t-8)(t-4)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ 4<t<8. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной *x*, получим

$$\left[\begin{array}{l} 2^x=1, \\ 4<2^x<8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ 2<x<3. \end{array}\right.$$

Ответ:$x\in\{0\}\cup(2;3)$.

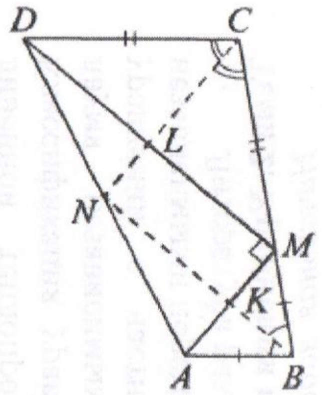
16. Точка *M* лежит на стороне *BC* выпуклого четырехугольника *ABCD*, причем *B* и *C* – вершины равнобедренных треугольников с основаниями *AM* и *DM* соответственно, а прямые *AM* и *DM* перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах *B* и *C* четырехугольника *ABCD* пересекаются на стороне *AD*.

б) Пусть *N* – точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырехугольника *ABCD*, если известно, что $BM:MC=3:4$, а площадь четырехугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN равна 24.

Решение.

а) Пусть K — середина отрезка AM. Треугольник AMB равнобедренный, поэтому отрезок BK является в нём медианой, биссектрисой и высотой. Поскольку прямые DM и AM перпендикулярны, прямая KB содержит среднюю линию треугольника AMD, то есть проходит через середину стороны AD. Аналогично, биссектриса угла MCD тоже проходит через середину стороны AD. Следовательно, биссектрисы углов B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.



б) Пусть прямые AM и BN пересекаются в точке K, а прямые DM и CN — в точке L. Тогда четырёхугольник $KMLN$ — прямоугольник. Площадь треугольника AMB равна

$$S_{ABM} = BK\ KM = \frac{BM}{MC} \cdot NK \cdot KM = \frac{3}{4} S_{KMLN} = 18.$$

Аналогично, $S_{DCM} = 32$. Площадь треугольника DMA равна

$$S_{DMA} = \frac{1}{2}\ AM\ DM = 2\ KM \cdot LM = 2S_{KMLN} = 48.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = S_{DMA} + S_{AMB} + S_{DMC} = 48 + 18 + 32 = 98.$$

Ответ: б) 98.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2

17. В июле 2020 года планируется брать кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года), и сумма платежей превосходит взятую в банке сумму на 156060 рублей?

Решение.

Пусть x руб. – искомая сумма кредита, y руб. – величина ежегодного платежа, $r\%$ – процентная ставка по кредиту.

В конце первого года долг составит: $rx - y$.

В конце второго года долг составит: $r(rx - y) - y$.

В конце третьего года долг составит: $r(r(rx - y) - y) - y = 0$.

По условию, $3y - x = 156060$. Получим уравнение

$$\frac{r^3x}{r^2 + r + 1} = \frac{156060 + x}{3}, \qquad x = 239400.$$

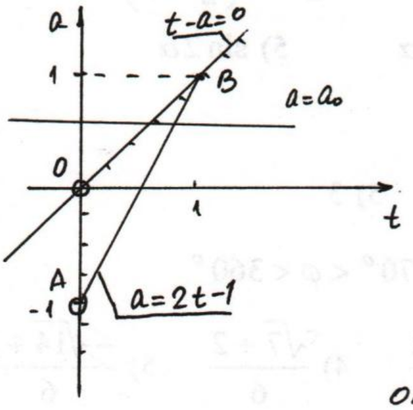
Ответ: 239400.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2^x - a = \sqrt{4^x - a}$ имеет единственный корень.

Решение

Пусть $2^x = t$, $t > 0$, тогда уравнение запишется

$$t - a = \sqrt{t^2 - a} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2at + a^2 = t^2 - a, \\ t - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a - 2t + 1) = 0, \\ t - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 2t - 1, \end{array}\right. \\ t - a \geq 0 \end{cases}$$



Если $a = 0$, то решением ур-я являются любое $t > 0$;

Решением уравнения такие будут точки прямой $a = 2t - 1$, для которых выполняются условия $t - a \geq 0$ и $t > 0$, т.е. отрезок AB.

Уравнение будет иметь единственное решение, если прямая $a = a_0$ и AB имеют единственную общую точку, т.е. при $-1 < a < 0$ и $0 < a \leq 1$.

Ответ: $-1 < a < 0$; $0 < a \leq 1$.

19. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -4, среднее арифметическое всех положительных из них равно 5, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -5.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $5k - 5l + 0 \cdot \mathrm{m} = -4(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 5, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 5. По условию $40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 45$. Таким образом, написано 45 чисел.

б) Приведём равенство $5k - 5l = -4(k + l + m)$ к виду $l = 9k + 4m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $l \geq 9k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим $k + l + m = 45$ в правую часть равенства $5k - 5l = -4(k + l + m)$, откуда $k = l - 36$. Так как $k + l \leq 45$, получаем: $2l - 36 \leq 45$; $2l \leq 81$; $l \leq 40$; $k = l - 36 \leq 4$, то есть положительных чисел не более 4.

Приведём пример, когда положительных чисел ровно 4. Пусть на доске 4 раза написано число 5, 40 раз написано число -5 и один раз написан 0. Тогда указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 45; б) отрицательных; в) 4.